

3.2.10 Důsledky věty o středovém a obvodovém úhlu

Předpoklady:

Věta objevená v minulé hodině:

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Nejčastěji využívané důsledky:

- Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné.
- **Thaletova věta: Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.**

Př. 1: Kružnice je rozdělena na dva oblouky tak, že obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je roven středovému úhlu příslušnému k menšímu oblouku. Urči velikost obvodových úhlů příslušných k oběma obloukům

Větší oblouk: obvodový úhel α , středový úhel 2α .

Menší oblouk: obvodový úhel β , středový úhel 2β .

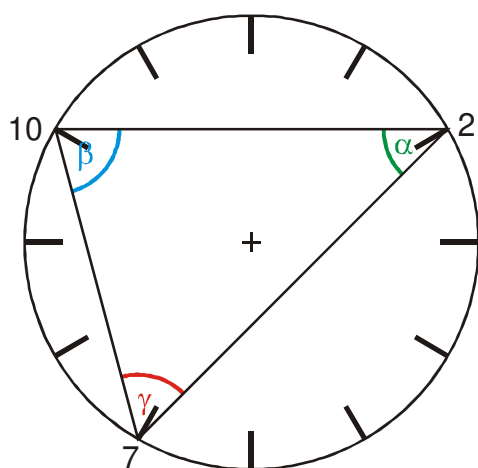
Platí: obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je roven středovému úhlu příslušnému k menšímu oblouku $\Rightarrow \alpha = 2\beta$.

oba středové úhly se rovnají plnému úhlu: $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$

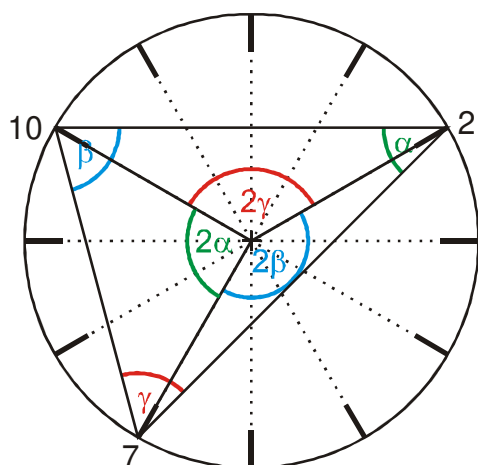
Dosadíme: $2\alpha + 2\beta = 2(2\beta) + 2\beta = 360^\circ$

$\beta = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

Př. 2: Vypočti velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který dostaneš, spojíš-li na ciferníku hodinek body vyznačující čísla 2, 7, 10.



Stačí, když si uvědomíme, že všechny vyznačené úhly jsou úhly obvodové, najdeme k nim příslušné úhly středové.



Velikost středového úhlu příslušející oblouku mezi dvěma hodinami: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

$$2\alpha : 3 \text{ dílky} \Rightarrow 2\alpha = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

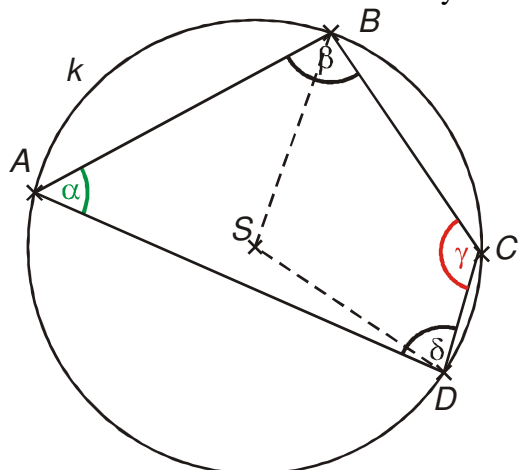
$$2\beta : 5 \text{ dílků} \Rightarrow 2\beta = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ$$

$$2\gamma : 4 \text{ dílky} \Rightarrow 2\gamma = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ$$

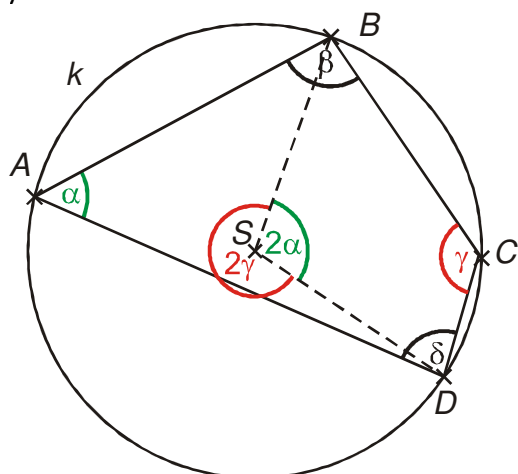
Př. 3: Jakou vlastnost musí mít všechny tětiové čtyřúhelníky? Dokaž.

Tětiový čtyřúhelník $\Rightarrow$ vrcholy leží na kružnici k . Součet protějších úhlu tětiového čtyřúhelníku musí být 180° (pravidlo z předchozí kapitoly).

Dokreslí do obrázku tětiového čtyřúhelníku s opsanou kružnicí úsečky BS a DS .



Plný úhel okolo středu S se rozdělí na dva středové úhly příslušné k obvodovým úhlům α a β .

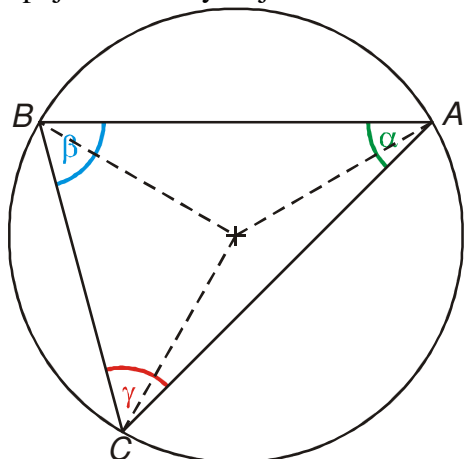


Platí: $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$.

Obdobně můžeme postupovat pro dvojici protějších úhlů β a δ .

Př. 4: Pokus se zdůvodnit, proč ze skutečnosti, že všem trojúhelníkům je možné opsat kružnici, vyplývá, že součet úhlů v trojúhelníku se rovná 180° . S kterým z předchozích příkladů tento postřeh nejvíce souvisí?

Spojíme vrcholy trojúhelníku se středem opsané kružnice.



Získáme tak tři středové úhly, které:

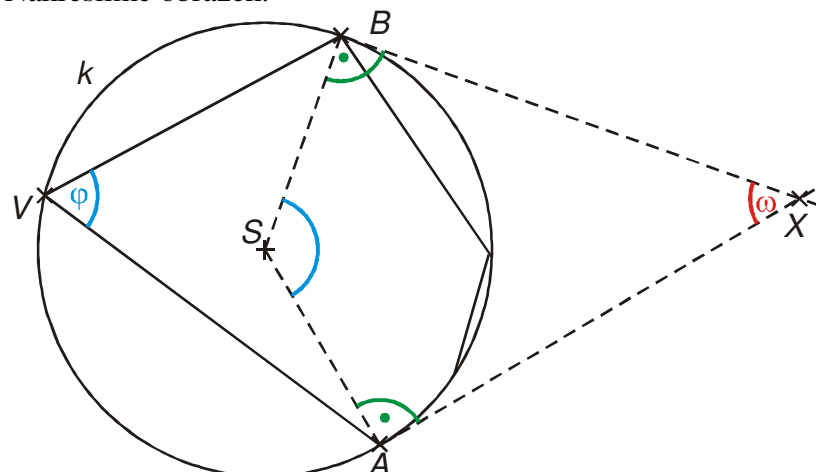
- mají dohromady součet 360° (plný úhel okolo středu S),
- přísluší jednotlivým vnitřním úhlům trojúhelníku ABC a jsou tedy jejich dvojnásobky.

Platí: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Příklad nejvíce souvisí s příkladem 2 (obrázek je ve skutečnosti převzatý a upravený).

Př. 5: AB je menší oblouk kružnice s obvodovým úhlem 65° . V bodech A, B jsou sestrojeny tečny kružnice a bod X je jejich průsečík. Vypočti velikost úhlu AXB .

Nakreslíme obrázek.



Hledaný úhel AXB je jedním z vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ASBX$.

Úhly čtyřúhelníku $ASBX$:

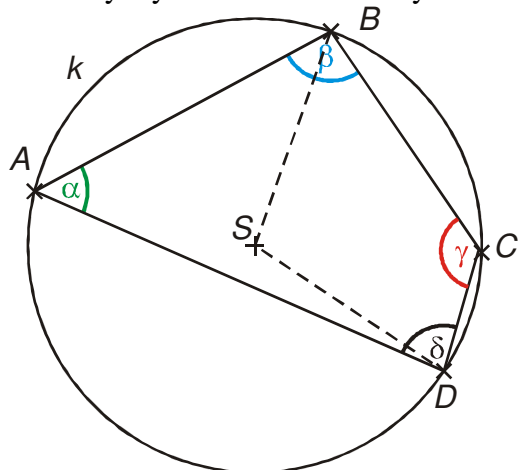
- úhly ASX a SBX jsou pravé (tečna je kolmá na poloměr)
- úhel ASB je středový úhel příslušný k obvodovému úhlu $AVB \Rightarrow |\sphericalangle ASB| = 2\varphi = 130^\circ$

$$\omega = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Úhel AXB má velikost 50° .

Př. 6: V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$, platí $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 96^\circ$. Urči zbývající vnitřní úhly.

Tětivový čtyřúhelník $\Rightarrow$ vrcholy leží na kružnici k .



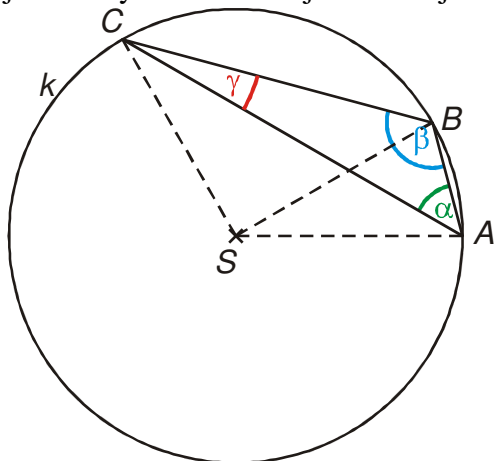
Úhel α je obvodový úhel k menšímu oblouku BD ,
úhel γ je obvodový úhel k většímu oblouku $BD \Rightarrow$
 $\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$

Úhel β je obvodový úhel k většímu oblouku AC ,
úhel δ je obvodový úhel k menšímu oblouku $AC \Rightarrow$
 $\beta + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$

Ve skutečnosti jsme větší část problému vyřešili již v příkladu 3, kde jsme odvodili vztah $\alpha + \gamma = 180^\circ$ ($\beta + \delta = 180^\circ$), který jsme mohli využít a požadované úhly z něj vypočítat.

Př. 7: Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC tak, že jeho vrcholy dělí kružnici k na tři oblouky v poměru $1:3:8$. Vypočti velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

Délka oblouku je přímo úměrná velikosti středového úhlu $\Rightarrow$ středové úhly odpovídající jednotlivým obloukům jsou ve stejném poměru jako velikosti oblouků.



Poměr: $1:3:8 \Rightarrow 12$ dílů $\Rightarrow 1$ díl: $360^\circ:12 = 30^\circ$.

Vypočteme velikosti jednotlivých středových úhlů:

- $|\sphericalangle ASB| = 30^\circ$,
- $|\sphericalangle BSC| = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$,
- $|\sphericalangle CSA| = 8 \cdot 30^\circ = 240^\circ$.

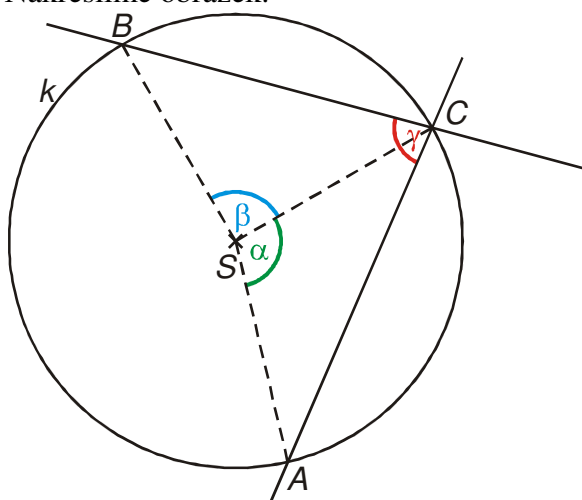
Vnitřní úhly trojúhelníku ABC jsou obvodové úhly odpovídajících středových úhlů $\Rightarrow$ určíme jejich velikosti:

- $\gamma = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ,$
- $\alpha = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BSC| = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$
- $\beta = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CSA| = \frac{1}{2} \cdot 240^\circ = 120^\circ.$

Vnitřní úhly trojúhelníku ABC mají velikosti 15° , 45° a 120° .

Př. 8: Je dána kružnice $k(S; r)$ a dvě její tětivy AC, BC ($|AC| < 2r$, $|BC| < 2r$). Urči velikost úhlu ACB , jestliže menšímu oblouku AC náleží středový úhel α a menšímu oblouku BC středový úhel β .

Nakreslíme obrázek.



Úhel ACB je obvodový úhel ke středovému úhlu $360 - \alpha - \beta$ (zbytek plného úhlu u středu S)

$\Rightarrow$ pro úhel ACB platí $|\sphericalangle ACB| = 180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$

Př. 9: Petáková:
 strana 88/cvičení 51
 strana 88/cvičení 53
 strana 88/cvičení 54

Shrnutí: Středový úhel příslušný k danému obvodovému úhlu má dvojnásobnou velikost.